

ICP-Africa Index Aggregation Methodology

Yuri Dikhanov¹

Summary:

This paper is a brief introduction to the methods used to aggregate purchasing power parities and related results for the International Comparison Program for Africa. Using national average prices of a comprehensive set of goods and services representing all GDP components, unweighted basic heading parities are obtained through an elementary aggregation process. These basic parities are in turn aggregated using corresponding basic heading expenditures to generate PPPs - and hence price-adjusted real quantities - for each expenditure category up to GDP level.

Key words: PPP, GDP, aggregation, price, index, expenditure.

Résumé:

Cet article est une brève introduction aux méthodes d'agrégation des parités de pouvoir d'achat (PPA) et autres résultats du programme de comparaison internationale pour l'Afrique. A partir des prix moyens nationaux d'un ensemble complet de biens et services représentant toutes les composantes du PIB, des parités élémentaires sont obtenues par un processus élémentaire d'agrégation. Ces parités élémentaires sont ensuite agrégées en leur affectant les données de dépenses correspondantes pour obtenir des PPA - et par conséquent des quantités réelles ajustées par les prix - pour chaque catégorie de dépense jusqu'au niveau du PIB.

Mots clés: PPA, GDP, agrégation, prix, indice, dépense.

1. Introduction

The choice of aggregation method significantly influences the results of international comparisons (both real incomes and rankings). This paper is an introduction to the methods used to aggregate the results for ICP-Africa. Detailed aggregations at the level of the basic heading were done

¹Development Data Group, International Economics Department, The World Bank, Washington, D.C.

using the Country-product-dummy (CPD) method. Higher level aggregations were done using the Iklé index. In the last round of the ICP for Africa detailed aggregations at the level of the basic heading were done using the Elteto-Köves-Szulc (EKS) method. Higher level aggregations were also done using the EKS method although for a limited set of results the Geary-Khamis (GK) method was applied.

ICP aggregation can be considered in terms of three steps. First, average product prices are generated for each country. Second, unweighted basic heading parities are obtained from the average prices (this step is called elementary aggregation). Third, the basic heading parities are aggregated using corresponding basic heading expenditures to arrive at the PPPs - and hence price-adjusted *real quantities* - for each expenditure category up to the highest level (e.g. GDP or Individual consumption). In the following sections, the aggregations methods at the elementary and higher levels are considered.

2. Elementary aggregator

ICP-Africa has adopted the CPD method as the elementary aggregator for use in the current ICP round. The CPD method was considered the most appropriate, given the nature of the data available and in view of the advantages in the CPD method identified by Diewert and Dikhanov.

There has been considerable recent study on the use of elementary aggregators both in the context of the ICP and in the construction of Consumer Price Indexes (CPIs)². Recent research shows that the choice of elementary aggregator depends in part on the nature of the data sets to which it is applied. In the last ICP round in Africa, the EKS method was used to provide aggregation of elementary data. European studies showed that the performance of the aggregation method could be enhanced by including reliable information about the representativity of the underlying prices. Early ICP comparisons used regression techniques such as the Country

²For a comprehensive discussion of elementary aggregator alternatives, see the ICP Manual, Chapter 11, Estimation of PPPs for Basic Headings <<http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/Ch11.doc>>. The properties and behaviour of elementary indices are also explained in some detail by Erwin Diewert in Chapter 20 of the Consumer Price Index Manual (2004) <<http://www.econ.ubc.ca/diewert/chpt20.pdf>>. Although written in the context of consumer price index construction, much of the discussion is equally relevant to basic heading PPPs. The topic has also been the subject of recent papers by Erwin Diewert, Yuri Dikhanov, Prasada Rao and others.

Product Dummy (CPD), as the method of aggregation. In a recent paper, Erwin Diewert³ stated that ‘a main advantage of the CPD method for comparing prices across countries over traditional index number methods is that we can obtain *standard errors* for the country price levels. This advantage of the stochastic approach to index number theory was stressed by Summers (1973) and more recently by Selvanathan and Rao (1994). In a more recent paper, Yuri Dikhanov⁴ showed that when the price matrix was dense and the representativity of the prices was close to 100%, the choice of aggregation method was unimportant. Importantly, he also showed that the CPD method was a more robust alternative when used with sparse price and representativity data. In his paper, Dikhanov compares variants of the EKS and CPD methods both with and without reliable representativity information using Monte Carlo simulations.

CPD index can be presented in two equivalent forms – with or without the intercept. First, the regression equation for the CPD can be written as

$$\ln p_{cp} = y_{cp} = x_{cp}\beta + \varepsilon_{cp} \quad (1)$$

where p_{cp} is price of product p in country c ; Dc_j and Dp_i are country and product dummies; and Np and Nc represent the number of products and countries, respectively;

$$x_{cp} = [Dc_2 \dots Dc_{Nc} Dp_1 Dp_2 \dots Dp_{Np}] \quad (2)$$

$$\beta = [\alpha_2 \dots \alpha_{Nc} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{Np}]^T$$

In matrix notation, by stacking individual observations, this can be written as:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

³Diewert, W.E. (2004), On the Stochastic Approach to Linking the Regions in the ICP, Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver, Canada <http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/Diewert_Linking.doc>

⁴Dikhanov, Yuri Assessing Efficiency of Elementary Indices with Monte Carlo Simulations (EKS, EKS-STAR, EKS-S, CPD and CPD-WEIGHTED) Development Data Group, International Economics Department, The World Bank, Washington, D.C., January, 1997 <http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/Comparison_Elementary_Indices2.pdf>

Note that the first country dummy is dropped from the system because matrix X is of rank (N_p+N_c-1) [in fact, we can drop any variable from the system; dropping the first country's dummy simply makes it the base country].

The solution is given (under the conditions of independently and identically distributed random disturbances) by

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (4)$$

In addition, we can drop one product variable (let's say the first product dummy) and introduce the intercept. This is the second form of the CPD. In this case⁵,

$$x'_{cp} = [Dc_2 \dots Dc_{N_c} \ 1 \ Dp_2 \dots Dp_{N_p}] \quad (5)$$

$$\beta' = [\alpha'_2 \dots \alpha'_{N_c} \ c_{\text{intercept}} \ \gamma'_2 \dots \gamma'_{N_p}]^T$$

$$y = X' \beta' + \varepsilon \quad (6)$$

The solutions of systems (4) and (6) - the country and product price relatives - are identical up to a scalar in these two cases. In the case with intercept,

$$\alpha_j = \alpha'_j$$

$$\gamma_1 = c_{\text{intercept}}$$

$$\gamma_i = \gamma'_i + c_{\text{intercept}},$$

$$\text{for } i = 2 \dots N_p, j = 2 \dots N_c$$

γ'_i and α'_j are the product coefficients for product i and country j , respectively, in this case with intercept.

3. Higher-level aggregation method

The step of elementary aggregation provides unweighted basic heading parities. These unweighted basic heading parities are then aggregated to derive PPPs and price-adjusted real quantities for each expenditure cat-

⁵Note that the sign ($'$) does not mean transpose. Sign (T) is used for that purpose.

egory, up to the level of GDP. For the current ICP-Africa round, the Iklé index⁶ has been used for higher level aggregation.

The Iklé index maintains additivity, minimizes the Gerschenkron effect and is computationally tractable. Although some residual Gerschenkron effect is intrinsic to any additive aggregation procedure, the Iklé index minimizes this effect when compared to other additive indexes. It is considerably superior to the Geary-Khamis index in this regard. For the AfDB, additivity is important. It is needed when comparing price and expenditure structures across countries, and in particular when comparing poverty levels. It is also important to avoid significant distortions to African income levels as a result of the Gerschenkron effect. Although the EKS index avoids the Gerschenkron effect, it is not additive⁷. As no single index meets all the preferred properties of a higher level aggregation index, it is necessary to compromise. The Iklé index offers additivity whilst minimizing the Gerschenkron effect and is considered the best option for the Africa program. A short summary and paraphrase of some of the findings and the formulation of the Iklé index is provided below.

When publishing the results of a multinational study such as the ICP, it is desirable that the final data publication should have a number of properties. Sometimes these properties may be mutually exclusive in which case choices have to be made as to which is the more important. In a review article published in 1987, Erwin Diewert set out a number of those properties⁸. Some important properties are listed below:

⁶ The Iklé aggregation method used for higher level aggregations in the current round of ICP-Africa was first published in 1972 but its potential for use in ICP aggregation was only brought to international attention in 1994 in a paper by Yuri Dikhanov presented at the Twenty-Third General Conference of the International Association for Research in Income and Wealth held at St. Andrews, New Brunswick, Canada in August of that year.

⁷ For a detailed comparison of the properties of the EKS, Geary-Khamis and Iklé aggregation procedures see Yuri Dikhanov's paper, Sensitivity of PPP-Based Income Estimates to Choice of Aggregation Procedures. <<http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/icppapertotal.pdf>>. For the reader interested in going beyond the summary provided in this annex more detail is available in the Internet. Several papers are referenced at the end of this publication together with the relevant URLs for Internet.

⁸ For a more formal presentation, see Diewert, *Index Numbers in New Palgrave Dictionary of Economics*, The Macmillan Press, 1987 <<http://www.econ.ubc.ca/diewert/indexch5.pdf>>. See also Kravis, Heston, Summers, "World Product and Income: International comparisons of real gross product", Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1982.

Base-country invariance The choice of a base country does not affect the relative income or price levels of individual countries, i.e., the country selected as the base serves as a numéraire only.

Matrix consistency This property is sometimes called additivity. Quantities obtained through applying the index should satisfy the two requirements: the values for any category should be directly comparable between countries as well as between categories.

Factor-reversal test The product of the price and quantity ratios equals the nominal expenditure ratio.

Transitivity Any pair-wise comparisons between the indexes are transitive in the sense that

$$I_{kj} = I_{ij} / I_{ik}$$

Transactions equality This property requires that the relative importance of each transaction be dependent only on its magnitude.

World representativeness This property implies that the international price structure must reflect the price and quantity structures of the world.

Statistical efficiency The results should be minimally sensitive with respect to the sampling errors in the original price and expenditure data.

The properties of the EKS can be compared to the above criteria. The EKS provides:

- Base country invariance;
- Transitivity;
- Direct information for two countries, including real prices;
- Less vulnerability to stochastic errors⁹;
Reduced Gerschenkron effect due to the fact that EKS is an unweighted geometric mean of the Fishers which do not have this effect; and
- Compliance with the factor-reversal test.

However, the EKS fails to provide: matrix consistency; and transactions equality. The index provides neither invariance to changes in political

⁹in tests, EKS has shown less sensitivity to stochastic errors in price and quantity data than GK.

sub-divisions nor equal treatment of individual transactions in different countries.

EKS has been the most widely used aggregation method as it completely avoids the Gerschenkron bias which raises the incomes of high income countries relative to low income ones. However, it has the disadvantage, for some purposes, of lack of additivity. The much-criticised Geary-Khamis methodology has been used but to a much lesser extent and only in situations where the user considered that additivity was essential. The Dikhanov paper compares EKS, Geary-Khamis and other non-additive and additive indices including Iklé. In a paper in 1987, Diewert stated that given the imperfections of the real world, the generalized EKS (GEKS) provided the least biased index available. Dikhanov, in his study, uses the GEKS as the benchmark against which he compared the performance of the other indices he considered. He specified the proximity of an index to the GEKS as a requirement. Because of the role of data error in real world data sets. He also tested for (i) distance, in some sense, from GEKS; and (ii) sensitivity of the index to data errors.

The Ikle index is shown as presented in Dikhanov (1994):

Consider the following system of prices and quantities:

$\mathbf{P} = [p_j^i]_{m \times n}$ and $\mathbf{Q} = [q_j^i]_{m \times n}$, for n commodities and m countries, with p_j^i and $q_j^i \geq 0$ for $\forall i, j$.

The traditional presentation for the Geary-Khamis system, in terms of international prices π and PPP, can be written as follows:

$$\pi_i = \sum_j \frac{p_j^i}{PPP_j} \kappa_j^i$$

$$PPP_j = \frac{\sum_i p_j^i q_j^i}{\sum_i \pi_i q_j^i}$$

where

$$\kappa_j^i = \frac{q_j^i}{\sum_j q_j^i}$$

Introducing country expenditure shares w provides:

$$\omega_j^i = \frac{p_j^i q_j^i}{\sum_i p_j^i q_j^i}$$

The Ikle weights can then be presented as:

$$\delta_j^i = \frac{\omega_j^i}{\sum_j \omega_j^i}$$

And, finally, the Ikle system can be written as:

$$\pi_i = \sum_j \frac{p_j^i}{PPP_j} \delta_j^i$$

$$PPP_j = \frac{\sum_i p_j^i q_j^i}{\sum_i \pi_i q_j^i}$$

4. Conclusion

The choice of aggregation methods for the ICP-Africa is based on their respective properties. At the basic heading level, the CPD method was preferred to the other traditional index number methods because its stochastic nature can provide *standard errors* for the country price levels. At higher levels, the choice of the Iklé index was mainly dictated by its additivity property and more importantly because it minimizes the Gerschenkron effect and is computationally tractable. In the ICP-Africa, the AfDB made sure that the final data publication should have a number of properties, such as: *base-country invariance, matrix consistency, factor-reversal test, transitivity, transactions equality, world representativeness, and statistical efficiency*.

References

Diewert, W.E. (1981), The Economic Theory of Index Numbers: a Survey, in *Essays in the Theory and Measurements of Consumer Behaviour in Honour of Sir Richard Stone*, ed. A. Deaton, Cambridge University Press, London

Diewert, W.E. (1987), *Index Numbers in The New Palgrave: Dictionary of Economics*, W.W. Norton

Diewert, W.E. (2004), *On the Stochastic Approach to Linking the Regions in the ICP*, Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver, Canada

Dikhanov, Yuri *Sensitivity of PPP-Based Income Estimates to Choice of Aggregation Procedures* Development Data Group, International Economics Department, The World Bank, Washington, D.C., January, 1997 <<http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/icppapertotal.pdf>>

Dikhanov, Yuri *Assessing Efficiency of Elementary Indices with Monte Carlo Simulations (EKS, EKS-STAR, EKS-S, CPD and CPD-WEIGHTED)* Development Data Group, International Economics Department, The World Bank, Washington, D.C., January, 1997 <http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/Comparison_Elementary_Indices2.pdf>

Kravis, Irving B; Kenessey, Zoltan; Heston, Alan; Summers, Robert; *A System of International Comparisons of Gross Product and Purchasing Power* (The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1975)

Kravis, Irving B; Heston, Alan; Summers, Robert; *International Comparisons of Real Product and Purchasing Power* (The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1978)

Kravis, Irving B; Heston, Alan; Summers, Robert; *World Product and Income: International Comparisons of Real Gross Product* (The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1982)

World Bank, *ICP 2003-2006 Handbook*, (World Bank website <<http://web.worldbank.org/WBSITE/EXTERNAL/DATASTATISTICS/ICPEXT/0,,contentMDK:20962711~menuPK:2666036~pagePK:60002244~piPK:62002388~theSitePK:270065,00.html>>, 2006

Méthodologie d'Agrégation des Indices du PCI-Afrique

Yuri Dikhanov¹

Résumé:

Cet article est une brève introduction aux méthodes d'agrégation des parités de pouvoir d'achat (PPA) et autres résultats du programme de comparaison internationale pour l'Afrique. A partir des prix moyens nationaux d'un ensemble complet de biens et services représentant toutes les composantes du PIB, des parités élémentaires sont obtenues par un processus élémentaire d'agrégation. Ces parités élémentaires sont ensuite agrégées en leur affectant les données de dépenses correspondantes pour obtenir des PPA - et par conséquent des quantités réelles ajustées par les prix - pour chaque catégorie de dépense jusqu'au niveau du PIB.

Mots clés: PPA, GDP, agrégation, prix, indice, dépense.

Summary:

This paper is a brief introduction to the methods used to aggregate purchasing power parities and related results for the International Comparison Program for Africa. Using national average prices of a comprehensive set of goods and services representing all GDP components, unweighted basic heading parities are obtained through an elementary aggregation process. These basic parities are in turn aggregated using corresponding basic heading expenditures to generate PPPs - and hence price-adjusted real quantities - for each expenditure category up to GDP level.

Key words: PPP, GDP, aggregation, price, index, expenditure.

1. Introduction

Le choix de la méthode d'agrégation a une grande portée sur les résultats des comparaisons internationales (à la fois sur les revenus réels et sur les classements). Les méthodes suivantes ont été utilisées pour le calcul des résultats du PCI-Afrique. Les PPA élémentaires au niveau des positions élémentaires (PE) ont été calculées en utilisant la méthode de régression

¹Development Data Group, International Economics Department, Banque Mondiale, Washington, D.C.

CPD. Les calculs aux niveaux supérieurs ont été faits avec l'indice Iklé. Dans la phase précédente la méthode Elteto-Köves-Szulc (EKS) a été retenue pour les calculs des PPA élémentaires et la méthode EKS pour les niveaux supérieurs mais la méthode Geary-Khamis (GK) a été utilisée pour quelques résultats.

La méthode d'agrégation du PCI est constituée de trois étapes. Dans une première étape les prix observés et les dépenses en monnaie locale pour les composantes du PIB pour la consommation individuelle sont regroupés dans des positions élémentaires. Deuxièmement, des PPA non pondérées ou des prix relatifs sont calculées pour chaque position élémentaire sur une base comparable et représentative avec un ajustement pour la qualité quand c'est nécessaire. Troisièmement, les PPA non pondérées sont agrégées pour obtenir des quantités réelles ajustées par les PPA et donc par les prix, pour chaque catégorie de dépense du PIB. Dans les sections qui suivent, les méthodes d'agrégation au niveau élémentaire et aux niveaux au dessus des positions élémentaires sont présentées.

2. Agrégation au niveau élémentaire

Il y a eu récemment plusieurs études sur les méthodes d'agrégation au niveau élémentaire dans le cadre du PCI et de l'Indice des Prix à la Consommation (IPC)². Des recherches récentes ont montré que le choix de la méthode d'agrégation au niveau élémentaire dépend en partie des données à utiliser. Dans la phase précédente du PCI en Afrique, la méthode EKS a été utilisée pour le calcul au niveau élémentaire. Des études en Europe ont montré que la performance de la méthode d'agrégation peut être améliorée par la prise en compte des informations fiables au sujet de la représentativité des produits utilisés. Les comparaisons précédentes du PCI ont utilisé la méthode de régression CPD. Dans un article récent, Erwin Diewert a indiqué que l'avantage de la méthode CPD pour la comparaison des prix entre les pays sur les méthodes classiques des indices est que nous pouvons calculer les erreurs types des niveaux de prix des pays. Summers (1973) et

²Pour un examen approfondi des méthodes alternatives de calcul des parités au niveau élémentaire, voir le Manuel du PCI, Chapitre 11, *Estimation of PPPs for Basic Headings*. Les propriétés et les caractéristiques des indices élémentaires sont aussi expliqués en détail by Erwin Diewert au chapitre 20 du manuel (2004) de l'indice des prix à la consommation. Bien que écrit dans le cadre de l'indice des prix de la construction, une bonne partie des points présentés sont aussi pertinents pour les PPA des positions élémentaires. Le sujet a aussi été abordé dans des articles récents par Yuri Dikhanov, Erwin Diewert et autres.

récemment Selvanathan et Rao (1994)³ ont mis l'accent sur cet avantage d'une approche stochastique de la théorie des indices. Dans un article plus récent, Yuri Dikhanov a montré que quand la matrice des prix est dense (un nombre très limité de prix manquants) et quand la représentativité des prix est proche de 100%, le choix de la méthode d'agrégation n'est pas important. De plus, il a aussi montré que la méthode CPD est une alternative plus robuste quand les données présente beaucoup de prix manquants et quand le taux de représentativité est faible⁴. Dans son article, Dikhanov compare les méthodes EKS et CPD avec ou sans une information fiable de représentativité en utilisant des simulations.

Le PCI-Afrique a retenu la méthode CPD pour le calcul des PPA élémentaires pour cette phase du PCI. La méthode CPD est la plus appropriée pour les données disponibles et compte tenu des avantages de la méthode indiqués par Diewert et Dikhanov.

L'indice CPD peut être présenté sous deux formes équivalentes - avec ou sans un terme constant. L'équation de régression peut être présentée comme:

$$\ln p_{cp} = y_{cp} = x_{cp}\beta + \varepsilon_{cp} \quad (1)$$

où p_{cp} est le prix du produit p dans le pays c ; Dc_j et Dp_i sont les variables muettes pour les pays et les produits et N_p and N_c représentent le nombre de produits et de pays, respectivement;

$$x_{cp} = [Dc_2 \dots Dc_{N_c} Dp_1 Dp_2 \dots Dp_{N_p}] \quad (2)$$

$$\beta = [\alpha_2 \dots \alpha_{N_c} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{N_p}]^T$$

Sous forme matricielle, en empilant les observations individuelles, l'équation est:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (3)$$

³Diewert, W.E , On the Stochastic Approach to Linking the Regions in the iCP, Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver, Canada.

⁴Dikhanov, Yuri Assessing Efficiency of Elementary Indices with Monte Carlo Simulations (EKS, EKS-STAR, EKS-S, CPD and CPD-WEIGHTED) Development Data Group, International Economics Department, The World Bank, Washington, DC, January, 1997 <http://siteresources.worldbank.org/ICINT/resorces/Comparison_Elementary_Indices2.pdf>

Il faut noter que la variable muette du premier pays n'est pas incluse dans le système parce que la matrice X est de rang (Np+Nc-1) [en fait, on peut ne pas inclure n'importe quelle variable dans le système; ne pas inclure dans le système la variable muette d'un pays, fait de ce pays le pays de base].

La solution est donnée (sous les conditions d'indépendance et de distribution identique des erreurs aléatoires), par:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (4)$$

En plus, on peut ne pas inclure la variable muette d'un produit (disons la variable muette du premier produit) et introduire un terme constant. C'est la deuxième forme du modèle CPD. Dans ce cas⁵, on a

$$\begin{aligned} x'_{cp} &= [Dc_2 \dots Dc_{Nc} \ 1 \ Dp_2 \dots Dp_{Np}] \\ \beta' &= [\alpha'_2 \dots \alpha'_{Nc} \ c_{\text{intercept}} \ \gamma'_2 \dots \gamma'_{Np}]^T \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}'\beta' + \varepsilon \quad (6)$$

Les solutions des systèmes (4) et (6) – les prix relatifs des pays et des produits – sont identiques dans les deux cas à une constante multiplicative. Dans le cas avec un terme constant,

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \alpha'_j \\ \gamma_1 &= c_{\text{Cons tan te}} \\ \gamma_i &= \gamma'_i + c_{\text{Cons tan te}} \\ \text{pour} \\ i &= 2, \dots, N_p \\ j &= 2, \dots, N_c \end{aligned}$$

γ'_i et α'_j sont les coefficients pour le produit i et le pays j, respectivement, dans le cas du modèle avec un terme constant.

3. Méthodes d'agrégation au niveau supérieur

Cette étape fournit les parités non pondérées des positions élémentaires. Les parités non pondérées des positions élémentaires sont ensuite agrégées pour calculer les quantités réelles (ajustées avec les PPA) pour chaque

⁵Prière noter que le signe (') ne signifie pas la transposition des matrices ou vecteurs). Le signe (T) est utilisé à cet effet.

catégorie de dépenses jusqu'au niveau du PIB. Pour cette phase du PCI-Afrique, l'indice⁵ de Iklé a été utilisé pour les agrégations au dessus des positions élémentaires.

L'indice de Iklé maintient l'additivité, réduit au maximum l'effet Gerschenkron et est facile à appliquer en termes de calcul. Bien qu'un effet Gerschenkron résiduel est intrinsèque à toute méthode additive d'agrégation, l'indice de Iklé réduit au maximum cet effet comparativement à d'autres indices additifs. A cet égard, il est de loin supérieur à l'indice de Geary-Khamis. L'additivité est importante pour la BAD. Elle est requise dans la comparaison des structures prix et des dépenses entre les pays, et en particuliers dans la comparaison des niveaux de pauvreté. Elle est aussi importante afin 'éviter la distorsion les niveaux de revenus africains du à l'effet de Gerschenkron. L'utilisation de l'indice EKS⁶ n'induit pas un effet de Gerschenkron, mais il n'est pas additif. Comme aucun indice n'a toutes les propriétés désirées, un compromis est nécessaire. L'indice de Iklé étant additif et minimisant l'effet de Gerschenkron, est considéré comme la meilleure option pour le programme africain. Un bref résumé de certaines conclusions et la formulation de l'indice d'Iklé sont présentés ci-dessous.

Dans la publication des résultats d'une étude multinationale comme le PCI, il est souhaitable que les résultats finaux aient certaines propriétés. Parfois, ces propriétés sont mutuellement exclusives et dans ces cas, un choix des propriétés le plus importantes doit être opéré. Dans un article publié en 1987, Erwin Diewert a énoncé un certain nombre de ces propriétés.

Invariance par rapport au pays de base Le choix du pays de base n'influe pas sur le revenu relatif ou les niveaux de prix de chaque pays, c'est-à-dire que le pays retenu comme base sert de numéraire seulement.

Cohérence Matricielle Cette propriété est parfois appelée. Les quantités obtenues en utilisant l'indice doivent satisfaire à deux conditions: les valeurs de chacune des catégories doivent être directement comparables aussi bien entre les pays qu'entre les catégories.

Test d'Inversion de Facteur La quantité obtenue en multipliant le prix par le ratio de quantité est égal à au ratio de la dépense nominale.

⁶Pour une comparaison détaillée des propriétés des procédures d'agrégation de EKS, Geary-Khamis et Iklé voir l'article de Yuri Dikhanov, *Sensitivity of PPP-Based Income Estimates to Choice of Aggregation Procedures*. Le lecteur intéressé à plus de détail que ce qui est présenté dans le résumé de cette annexe est prié de se référer à l' Internet. Les références de plusieurs articles par Diewert et par Dikhanov sont présentées à la fin de cette publication avec les URLs correspondantes pour l'*Internet*.

Transitivité Chaque comparaison binaire entre les indices est transitive en ce sens que

$$I_{kj} = I_j / I_j^k$$

Egalité des transactions Cette propriété requiert que l'importance relative de chaque transaction dépende seulement de sa taille.

Représentativité Mondiale De part cette propriété, la structure internationale de prix doit refléter les structures de prix et quantité du monde.

Efficacité statistique Les résultats ne doivent être que très sensibles aux erreurs d'échantillonnage des données initiales de prix et de dépenses.

Les propriétés de EKS peuvent être comparées aux critères de Diewert. EKS The *EKS* provides:

- Invariance du pays de base;
- Transitivité;
- Information directe pour deux pays notamment les prix réels;
- Sensibilité moindre aux erreurs aléatoires⁷;
- Un effet réduit de l'effet Gerschenkron du fait que EKS est une moyenne géométrique non pondérée des indices de Fisher qui n'ont pas ce effet; et
- Conformité avec le Test d'Inversion de Facteur.

Cependant le EKS n'a pas: la cohérence Matricielle; et l'égalité des transactions. L'indice ne fournit pas d'invariance aux changements des subdivisions politiques et de traitement égal des transactions individuelles dans différents pays.

EKS a été la méthode d'agrégation la plus utilisée comme elle est dépourvue du biais de *Gerschenkron* qui augmente les revenus des pays à haut revenu relativement aux pays à faible revenu. Cependant il a le désavantage de ne pas être additif. La très critiquée méthode de *Geary-Khamis* a été moins utilisée et l'a été seulement dans les cas où l'additivité n'était pas

⁷Dans les tests, EKS a montré moins de sensibilité que le GK aux erreurs aléatoires des données de prix et de quantité.

importante. L'article de Dikhanov compare *EKS*, *Geary-Khamis* et autres indices additives et non additives y compris l'indice de Iklé. Dans un article Diewert en 1987, a indiqué que compte tenu des imperfections du monde réel, l'EKS généralisé (EKSG) est de tous les indices, l'indice qui a le moins de biais. Dans son étude, Dikhanov, a utilisé le *GEKS* comme la référence à laquelle il a comparé les autres indices qu'il a examinés. Le critère de performance qu'il a retenue est la proximité de l'indice par rapport au EKSG. A cause des erreurs inhérentes aux données réelles il a aussi testé (i) la distance des indices étudiés par rapport au EKSG, et (ii) leur sensibilité aux erreurs dans les données initiales.

L'indice de Iklé est présenté comme dans l'article de Dikhanov (1994):

Considérons le système suivant de prix et de quantité:

$\mathbf{P} = [p_j^i]_{m \times n}$ et $\mathbf{Q} = [q_j^i]_{m \times n}$, pour n produits et m pays, avec p_j^i et $q_j^i \geq 0$ pour $\forall i, j$.

Les prix internationaux π et les PPA dans la présentation habituelle du système Geary-Khamis system, peuvent s'écrire comme:

$$\pi_i = \sum_j \frac{p_j^i}{PPP_j} \kappa_j^i \quad \text{où} \quad \kappa_j^i = \frac{q_j^i}{\sum_j q_j^i}$$

$$PPP_j = \frac{\sum_i p_j^i q_j^i}{\sum_i \pi_i q_j^i}$$

Les parts w des dépenses des pays sont définies comme:

$$\omega_j^i = \frac{p_j^i q_j^i}{\sum_i p_j^i q_j^i}$$

Les pondérations d'Iklé sont définies comme:

$$\delta_j^i = \frac{\omega_j^i}{\sum_j \omega_j^i}$$

Et le système d'Ikle peut s'écrire comme:

$$\pi_i = \sum_j \frac{p_j^i}{PPP_j} \delta_j^i$$

$$PPP_j = \frac{\sum_i p_j^i q_j^i}{\sum_i \pi_i q_j^i}$$

Conclusion

Le choix des méthodes d'agrégation du PCI-Afrique dépend de leurs propriétés respectives. Au niveau des positions élémentaires, la méthode CPD a été préférée aux autres méthodes d'indices traditionnelles parce que sa nature stochastique permet de fournir des erreurs types pour les niveaux des prix des pays. Aux niveaux supérieurs, le choix de l'indice Iklé a été principalement dicté par sa propriété d'additivité et d'une manière primordiale parce qu'elle réduit au minimum l'effet dit de Gerschenkron, tout en étant calculable en informatique. Dans le PCI-Afrique, la BAD a veillé à ce que la publication finale des résultats respecte un certain nombre de propriétés, telles que l'Invariance par rapport au pays de base, la cohérence matricielle, le test d'inversion des facteurs, la transitivité, l'égalité des transactions, la représentativité mondiale, et l'efficacité statistique.

References

Diewert, W.E. (1981), *The Economic Theory of Index Numbers: a Survey*, in *Essays in the Theory and Measurements of Consumer Behaviour in Honour of Sir Richard Stone*, ed. A. Deaton, Cambridge University Press, London

Diewert, W.E. (1987), *Index Numbers in The New Palgrave: Dictionary of Economics*, W.W. Norton

Diewert, W.E. (2004), *On the Stochastic Approach to Linking the Regions in the ICP*, Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver, Canada

Dikhanov, Yuri *Sensitivity of PPP-Based Income Estimates to Choice of Aggregation Procedures* Development Data Group, International Econo-

mics Department, The World Bank, Washington, D.C., January, 1997
<<http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/icppapertotal.pdf>>

Dikhanov, Yuri Assessing Efficiency of Elementary Indices with Monte Carlo Simulations (EKS, EKS-STAR, EKS-S, CPD and CPD-WEIGHTED) Development Data Group, International Economics Department, The World Bank, Washington, D.C., January, 1997 <http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/Comparison_Elementary_Indices2.pdf>

Kravis, Irving B; Kenessey, Zoltan; Heston, Alan; Summers, Robert; A System of International Comparisons of Gross Product and Purchasing Power (The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1975)

Kravis, Irving B; Heston, Alan; Summers, Robert; International Comparisons of Real Product and Purchasing Power (The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1978)

Kravis, Irving B; Heston, Alan; Summers, Robert; World Product and Income: International Comparisons of Real Gross Product (The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1982)

World Bank, ICP 2003-2006 Handbook, <<http://web.worldbank.org/WBSITE/EXTERNAL/DATASTATISTICS/ICPEXT/0,,contentMDK:20962711~menuPK:2666036~pagePK:60002244~piPK:62002388~theSitePK:270065,00.html>>, 2006